321 група «Диференціальні рівняння»

(доцент Бистрянцева А.М.)

ЛЕКЦІЯ № 5 (ПРОДОВЖЕННЯ) + ПРАКТИЧНЕ

Лінійні диференціальні рівняння

1. Метод варіації довільної сталої

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x), \qquad (21)$$

де $a(x)$, $b(x)$ – неперервні функції від x на деякому проміжку. При $b(x) \not\equiv 0$ рівняння (21) називається *лінійним неоднорідним*. Якщо $b(x) \equiv 0$, то рівняння (21) називається *лінійним однорідним*. Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Особливість рівняння (21): шукана функція y і її похідна y' входять в рівняння в першому степені, не перемножуючись між собою.

Для того, щоб розв'язати неоднорідне рівняння (21), можна використати *метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)* , який полягає в наступному.

1) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння, тобто рівняння

$$y' = a(x)y.$$

У цьому рівнянні відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx \quad \text{і} \quad \ln|y| = \int a(x)dx + \ln|C_1|.$$

Таким чином, $\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{\int a(x)dx}$, тобто

$$y(x) = \pm C_1 e^{\int a(x)dx} \quad \text{або} \quad y(x) = Ce^{\int a(x)dx}, \quad C = \pm C_1.$$

2) Запишемо загальний розв'язок рівняння (21) у вигляді

$$y(x) = C(x)e^{\int a(x)dx}, \qquad (22)$$

де $C(x)$ – нова невідома функція.

3) Знайдемо функцію $C(x)$, підставивши для цього розв'язок (22) в рівняння (21). Для цього знаходимо похідну

$$y' = C'(x)e^{\int a(x)dx} + C(x)e^{\int a(x)dx}(a(x)).$$

Підставляємо значення y і y' в рівняння (21):

$$C'(x)e^{\int a(x)\,dx}+a(x)C(x)e^{\int a(x)\,dx}=a(x)C(x)e^{\int a(x)\,dx}+b(x)$$

або

$$C'(x)e^{\int a(x)\,dx}=b(x).$$

Таким чином,

$$dC(x)=b(x)e^{-\int a(x)\,dx}dx.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$C(x)=\int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}dx+C.$$

Підставляючи вираз $C(x)$ в рівність (22), одержимо загальний розв'язок рівняння (21):

$$y(x)=\left(\int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}dx+C\right)e^{\int a(x)\,dx}.$$

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'+\frac{2y}{x}=x^3.$$

Розв'язання. Розв'яжемо дане рівняння методом варіації довільної сталої.

1) Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння, тобто рівняння

$$y'+\frac{2y}{x}=0.$$

Маємо $\frac{dy}{y}=-\frac{2dx}{x}$, або $y=\frac{C}{x^2}$.

2) Запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння у вигляді

$$y=\frac{C(x)}{x^2},$$

де $C(x)$ – нова невідома функція.

3) Знайдемо функцію $C(x)$. Маємо

$$y'=C'(x)\frac{1}{x^2}+C(x)\left(-\frac{2}{x^3}\right).$$

Тоді підставимо y, y' у вихідне рівняння

$$\frac{C'(x)}{x^2}-\frac{2C(x)}{x^3}+\frac{2C(x)}{x^3}=x^3,\ \text{тобто}\ C'(x)=x^5.$$

Інтегруючи, маємо: $C(x)=\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C_1$.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right) = \frac{x^4}{6} + \frac{C_1}{x^2}. \qquad \square$$

Завдання для самоконтролю

Розв'язати рівняння.

47. $y' - y\sin x = \sin x\cos x$.

48. 1) $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$;

2) $xy' - 2y + x^2 = 0$.

49. $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$.

50. 1) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$;

2) $y' - 2xy = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

51. 1) $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x + \dfrac{x^2\cos x}{\sin x}$;

2) $y'x\ln x - (1 + \ln x)y + \sqrt{x}\left(1 + \ln\sqrt{x}\right) = 0$.

Розв'язати задачі Коші.

56. 1) $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$;

2) $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 3$.

57. 1) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

2) $(1 + x)y' + y + x^2(1 + x) = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{12}$.

Розв'яжіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

26. $y' + y = e^x$.

27. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$.

28. $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

29. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.

30. $2y\dfrac{dx}{dy} + x = 2y^3$.

31. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$.

32. $y' - 4y = \cos x$.

33. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

34. $y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x(x - 2)}{x}$.

35. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x - x^2\,\mathrm{ctg}\,x$.

ЛЕКЦІЯ № 6, 7 + ПРАКТИЧНЕ

Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник. Рівняння Бернуллі

План

1. Рівняння Бернуллі.

2. Рівняння у повних диференціалах.

3. Розв'язування рівнянь.

1. Рівняння Бернуллі

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^k,}$$

де k — дійсне число $(k \neq 0; 1)$. При $k = 0$ і $k = 1$ дане рівняння є лінійним.

Заміною $\boxed{z = y^{1-k}}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Або ж шукають його розв'язок у вигляді $\boxed{y = u(x)v(x).}$

2. Рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \qquad (3.10)$$

у якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

називають *рівнянням у повних диференціалах.* У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (3.10) має вигляд

$$u(x, y) = C.$$

Для того, щоб рівняння (3.10) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.} \qquad (3.11)$$

Функцію $u(x, y)$ можна дістати, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \end{cases}$$

або скористатися формулою

$$\boxed{u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dx.}$$

Якщо умова (3.11) не виконується, то у деяких випадках можна звести рівняння (3.10) до рівняння у повних диференціалах шляхом домноження його на так званий *інтегрувальний множник* $\mu(x, y)$. Для існування інтегрувального множника $\mu(x)$ необхідно, щоб вираз $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ N$ був функцією лише змінної x. Тоді

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}. \quad (3.12)$$

Аналогічно, якщо вираз $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ M$ залежить лише від змінної y, то існує інтегрувальний множник $\mu(y)$, який знаходять за формулою

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}.$$

3. Розв'язування рівнянь

Приклад 1 Розв'язати рівняння Бернуллі: $y' + \dfrac{2x}{x^2+1} y + y^2 = 0$.

Розв'язання. Зведемо дане рівняння до лінійного за допомогою підстановки $z = y^{-1}$. Тоді $y = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}$ і рівняння (3.14) набирає вигляду

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0,$$

або

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}z=1\,. \tag{3.15}$$

Розв'яжемо це рівняння *методом варіації довільної сталої.*

Спочатку знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}z=0\,,\quad \frac{dz}{z}=\frac{2x}{x^2+1}dx\,,\quad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}\,,$$

$$\ln|z|=\ln|C|+\ln(x^2+1)\,,\quad z=C(x^2+1).$$

Згідно з методом варіації довільної сталої вважатимемо C невідомою функцією змінної x, тобто $C=C(x)$.

Тоді

$$z=C(x)(x^2+1)\,,\quad \frac{dz}{dx}=\frac{dC}{dx}(x^2+1)+2xC(x)\,.$$

Підставимо ці вирази у рівняння (3.15):

$$\frac{dC}{dx}(x^2+1)+C(x)2x-\frac{2x}{x^2+1}C(x)(x^2+1)=1,$$

звідки після спрощень дістанемо умову для визначення функції $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx}=\frac{1}{x^2+1}\,.$$

Тоді

$$C(x)=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C_1\quad(C_1=\mathrm{const})\,.$$

Таким чином,

$$1/y=z=(\operatorname{arctg}x+C_1)(x^2+1)\,,\quad \text{або}\quad y=\frac{1}{(\operatorname{arctg}x+C_1)(x^2+1)}\ —$$

загальний розв'язок вихідного рівняння.

Зауважимо, що дане рівняння, крім загального розв'язку, має ще особливий розв'язок $y=0$.

9. Розв'яжіть рівняння

$$ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах (див. умову (3.11)). У даному випадку

$$M(x, y) = ye^x, \quad N(x, y) = y + e^x; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = e^x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x.$$

Отже, умова (3.11) виконується, значить існує така функція $u(x, y)$, яка задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = ye^x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = y + e^x. \end{cases} \tag{3.16}$$

Проінтегруємо перше рівняння системи (3.16) за змінною x:

$$u = \int ye^x dx = ye^x + \varphi(y). \tag{3.17}$$

Залишилося конкретизувати функцію $\varphi(y)$. Продиференціюємо рівність (3.17) за y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^x + \varphi'(y)$. Тепер прирівнюємо праві частини останньої формули і другого рівняння системи (3.16):

$$e^x + \varphi'(y) = y + e^x, \quad \varphi'(y) = y, \quad \varphi = \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Таким чином,

$$u = ye^x + \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Остаточно $ye^x + \dfrac{y^2}{2} = C$ — загальний інтеграл даного рівняння ($C = \text{const}$).

10. Розв'яжіть рівняння

$$(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Маємо:

$$M(x, y) = x^2 \cos x - y, \quad N(x, y) = x;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже, дане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Оскільки вираз $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=-\dfrac{2}{x}$ залежить лише від x, то існує інтегрувальний множник $\mu(x)$, який шукаємо за формулою (3.12):

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=1/x^2.$$

Домноживши дане рівняння на множник $\dfrac{1}{x^2}$, дістанемо рівняння у повних диференціалах

$$(\cos x-\frac{y}{x^2})dx+\frac{1}{x}dy=0.$$

Далі маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x-\dfrac{y}{x^2},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x};\end{cases}\qquad u=\frac{y}{x}+\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}+\varphi'(x),$$

$$\cos x-\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x^2}+\varphi'(x),\ \ \varphi'(x)=\cos x,\ \ \varphi(x)=\sin x+C_1.$$

Загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$\frac{y}{x}+\sin x=C.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння в рівняння Бернуллі [ч. 2, с. 33]:

$$y'+\frac{2}{x}y=-x^4y^3e^x.$$

Поділивши його на y^3, дістанемо

$$\frac{y'}{y^3}+\frac{2}{xy^2}=-x^4e^x,\ \ y\neq 0.$$

Зробимо заміну

$$z=\frac{1}{y^2},$$

тоді

$$z'=-\frac{2y'}{y^3}.$$

Тепер отримуємо лінійне неоднорідне рівняння

$$-\frac{z'}{2}+\frac{2}{x}z=-x^4\,\mathrm{e}^x,$$

або

$$z'-\frac{4}{x}z=2x^4\,\mathrm{e}^x.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі – Фур'є. Припустимо, що $z(x)=u(x)v(x)$, тоді

$$z'=u'v+uv'$$

і рівняння набуває вигляду

$$uv'+u'v-\frac{4uv}{x}=2x^4\,\mathrm{e}^x,$$

або

$$\left(u'-\frac{4u}{x}\right)v+uv'=2x^4\,\mathrm{e}^x.$$

Функцію $u(x)$ виберемо так, щоб $u'-\frac{4u}{x}=0$. Звідси

$$\frac{du}{u}=4\frac{dx}{x},\ \ln|u|=4\ln|x|\ \text{ і }\ u=x^4,$$

тоді

$$v'x^4=2x^4\,\mathrm{e}^x,\ \text{або}\ v'=2\mathrm{e}^x.$$

Розв'язуючи здобуте рівняння, знаходимо $u(x)=2\mathrm{e}^x+C$. Тепер маємо

$$z(x)=uv=x^4\left(2\mathrm{e}^x+C\right).$$

Це загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння. Оскільки $y=z^{-\frac{1}{2}}$, то зрештою дістанемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y=\frac{1}{x^2\sqrt{2\mathrm{e}^x+C}}.$$

Відповідь: $y=\dfrac{1}{x^2\sqrt{2\mathrm{e}^x+C}}$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0.$$

Розв'язання. Це рівняння у повних диференціалах [ч. 2, с. 35], оскільки

$$P(x,\ y)=2xy,\ \ Q(x,\ y)=x^2-y^2,\ \ \frac{\partial P}{\partial y}=2x,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

Ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x,\ y)$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy,\ \ \frac{\partial U}{\partial y}=x^2-y^2.$$

Зінтегруємо першу з рівностей за x (вважаючи y сталою):

$$U(x,\ y)=\int 2xydx+\varphi(y)=x^2y+\varphi(y).$$

Здобуту рівність диференціюємо за y:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+\varphi'(y).$$

Маємо рівняння $x^2+\varphi'(y)=x^2-y^2$. Звідси знаходимо $\varphi'(y)=-y^2$ і $\varphi(y)=$ $=-\dfrac{y^3}{3}+C_1$. Загальний інтеграл рівняння набуває вигляду

$$x^2y-\frac{y^3}{3}=C_1,$$

або

$$3x^2y-y^3=C,$$

де

$$C=3C_1.$$

Відповідь: $3x^2y-y^3=C$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(y+\ln x)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов (2.64) і (2.65) [ч. 2, с. 39]. Для цього знайдемо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 .$$

У такому разі умова (2.64) [ч. 2, с. 39] не виконується, оскільки $\dfrac{-1-1}{y+\ln x}$ не є функцією тільки y. Виконується умова (2.65), тому що $-\dfrac{1+1}{x} = -\dfrac{2}{x} = F(x)$. Скориставшись формулою $\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}$, знайдемо

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2} .$$

Домножимо вихідне рівняння на $\mu = \dfrac{1}{x^2}$ і дістанемо

$$\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0, \ \ x \neq 0 . \tag{9.1}$$

Це рівняння в повних диференціалах, тому що для нього виконується умова $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2} .$$

Отже, ліва частина рівняння (9.1) є повним диференціалом деякої функції $U(x, \ y)$: $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{1}{x}$. Знайдемо $U(x, \ y)$ з рівняння (9.1):

$$U(x, \ y) = \int\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx + \varphi(y) = -\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \varphi(y) .$$

Диференціюючи за y, отримуємо

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y),$$

звідки дістаємо рівняння

$$-\frac{1}{x}+\varphi'(y)=-\frac{1}{x}$$

і маємо

$$\varphi'(y)=0\,;\ \varphi(y)=C_1\,.$$

Отже,

$$-\frac{y}{x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1=C_2\,.$$

Відповідь: $y=Cx-\ln x-1$ – загальний розв'язок вихідного рівняння, де $C=C_1-C_2$.

Завдання для самоконтролю

Розв'язати рівняння.

60. 1) $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$; 2) $\left(1+x^2\right)y'=xy+x^2y^2$.

61. 1) $xy^2y'=x^2+y^3$; 2) $x^2y'+2x^3y=y^2\left(1+2x^2\right)$.

62. 1) $y'+\frac{2y}{x}=3x^2y^{\frac{4}{3}}$; 2) $y'+\frac{y}{x+1}=-\frac{1}{2}(x+1)^3y^3$.

63. 1) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; 2) $y'+y\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}=y^2\left(1-x^2\right)\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$.

Розв'язати рівняння.

66. 1) $\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0$;

2) $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$

67. 1) $\left(x+\sin y\right)dx+\left(x\cos y+\sin y\right)dy=0$;

2) $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0.$

68. 1) $\left(x^2+y^2+y\right)dx+\left(2xy+x+e^y\right)dy=0,\ \ y(0)=0$;

2) $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$

69. 1) $\left(3x^2y+\sin x\right)\ dx+\left(x^3-\cos y\right)dy=0$;

2) $\left(3x^2\mathrm{tg}\,y-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(\frac{x^3}{\cos^2 y}+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0.$

Розв'язати рівняння.

72. $\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2y\,dy=0$.

73. $\left(x^2-3y^2\right)dx+2xy\,dy=0$.

74. $\left(x\sin y+y\cos y\right)dx+\left(x\cos y-y\sin y\right)dy=0$.

75. $\cos x\,dy+\left(\sin x+\mathrm{e}^y\right)dx=0$.

Розв'яжіть рівняння Бернуллі

36. $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}\,x$. **37.** $xy^2y'=x^2+y^3$.

38. $xy'+2y=\frac{2x\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. **39.** $(1+x^2)y'-2xy=4\sqrt{(1+x^2)y}\cdot\mathrm{arctg}\,x$.

Розв'яжіть рівняння у повних диференціалах.

40. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$.

41. $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$.

42. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

43. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0$.

44. $(3x^2y+\sin x)dx+(x^3-\cos y)dy=0$.

45. $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy$.

Зведіть рівняння до рівнянь у повних диференціалах та розв'яжіть їх.

46. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2ydy=0$.

47. $(y+\ln x)dx-xdy=0$.

48. $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$.